平成 30 年度 4 年生数学実力試験　2018.12.12　　解答例

4–[　　　]　(　　　)番　　氏名 ____________________

1. 次の方程式・不等式を解け．[各 4 点]

(1) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \geqq \sqrt[3]{2}$

$$\left(2^{-2}\right)^x \geqq 2^{\frac{1}{3}}$$

$$-2x \geqq \frac{1}{3}$$

$$x \leqq -\frac{1}{6}$$

$$\underline{x \leqq -\frac{1}{6}}$$

(2) $x^3 - x^2 + x + 3 = 0$

$P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$ とすると, $P(-1) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ & & -1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 3)$

$P(x) = 0$ とすると,

$x = -1,\ x^2 - 2x + 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i$$

よって, 解は $\underline{x = -1,\ 1 \pm \sqrt{2}i}$

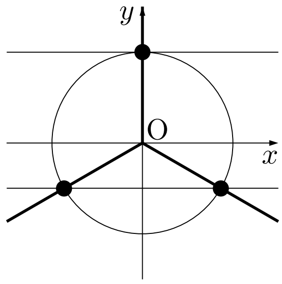
(3) $\log_3(x-6) + \log_3 x = 3$

真数の条件より, $x - 6 > 0$, $x > 0$ なので,
$x > 6$

$\log_3(x-6)x = \log_3 3^3$
$x^2 - 6x - 27 = 0$
$(x-9)(x+3) = 0$ よって, $x = 9,\ -3$
$x > 6$ より, $\underline{x = 9}$

(4) $2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

$(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1) = 0$



$\sin\theta = -\dfrac{1}{2},\ 1$
$0 \leqq \theta < 2\pi$ より
$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$

2. 導関数を求めよ．[各 4 点]

(1) $y = e^{-x}\cos 3x$

$$\begin{aligned} y' &= (e^{-x})'\cos 3x + e^{-x}(\cos 3x)' \\ &= -e^{-x}\cos 3x + e^{-x}\cdot 3(-\sin 3x) \\ &= \underline{-e^{-x}(\cos 3x + 3\sin 3x)} \end{aligned}$$

(2) $y = \dfrac{x+3}{5x-2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1\cdot(5x-2) - (x+3)\cdot 5}{(5x-2)^2} \\ &= \underline{\frac{-17}{(5x-2)^2}} \end{aligned}$$

3. 次の定積分・不定積分を求めよ．[各 4 点]

(1) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

$$\begin{aligned} &= \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2(\log x)'\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^2\log e - \frac{1}{2}\log 1 - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \underline{\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int x^2(x^3+2)^5\,dx$

$x^3+2=u$ とおくと，$3x^2\,dx=du$

$x^2\,dx=\dfrac{1}{3}\,du$

$$与式 = \int u^5\cdot\frac{1}{3}\,du=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}u^6+C$$

$$=\underline{\frac{1}{18}(x^3+2)^6+C}$$

4. 次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y=\dfrac{6}{x+1}$ 上の $x=1$ に対応する点における接線の方程式を求めよ． [5 点]

$y'=-\dfrac{6}{(x+1)^2}$

$x=1$ のとき, $y=\dfrac{6}{2}=3$

$y'=-\dfrac{6}{2^2}=-\dfrac{3}{2}$

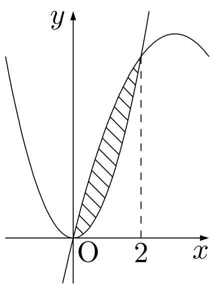
接線の方程式は

$y-3=-\dfrac{3}{2}(x-1)$ より,

$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}+3$

$\underline{y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}}$

(2) 曲線 $y=2x^2$, $y=-x^2+6x$ で囲まれた図形の面積を求めよ. [5 点]



$2x^2=-x^2+6x$ とすると,

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x=0,\ 2$

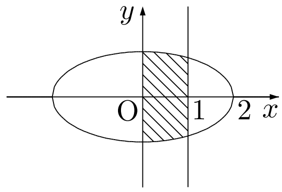
$$\int_0^2(-x^2+6x-2x^2)\,dx$$

$$=\int_0^2(-3x^2+6x)\,dx=\Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2$$

$=-8+12=\underline{4}$

(3) $\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq 1$ で表される領域を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ. [5 点]

求める体積は



$$\pi\int_0^1 y^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{12}x^3\right]_0^1$$

$$=\pi\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{11}{12}\pi$$

(4) 男子 4 人，女子 2 人が一列に並ぶとき，女子 2 人が <u>隣り合わない</u> 並び方は何通りあるか. [3 点]

全ての並び方は $6!$ 通り

女子 2 人が隣り合う並び方は $5!\cdot 2$ 通り

$6!-5!\cdot 2$

$=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1-5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2$

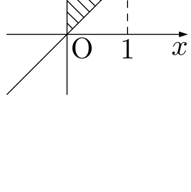
$=720-240=480$

<u>480 通り</u>

(5) 次の 2 重積分の値を求めよ. [5 点]

$$\iint_{\mathrm{D}}(4x+3y^2)\,dx\,dy,$$

$$\mathrm{D}=\{(x,y)|0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 1\}$$



$$\int_0^1\left\{\int_x^1(4x+3y^2)\,dy\right\}dx$$

$$=\int_0^1\Big[4xy+y^3\Big]_x^1\,dx$$

$$=\int_0^1\left(4x+1-4x^2-x^3\right)dx$$

$$=\left[2x^2+x-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=2+1-\frac{4}{3}-\frac{1}{4}=\underline{\frac{17}{12}}$$

(6) 次の行列式を因数分解せよ．[4 点]

$$\begin{vmatrix} a & a & a^2 \\ a & b & b^2 \\ a & c & c^2 \end{vmatrix}$$
$$= a\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$
$$= a\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$
$$= a\begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$
$$= a(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$
$$= a(b-a)(c-a)(c+a-b-a)$$
$$= a(b-a)(c-a)(c-b)$$

(7) 次の和を求めよ．答えは因数分解した形にしておくこと．[4 点]

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-1) \quad = \sum_{k=1}^{n}3k^2 + \sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1$$
$$= 3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - n$$
$$= \frac{n}{2}\left\{(n+1)(2n+1)+(n+1)-2\right\}$$
$$= \frac{n}{2}\left(2n^2+3n+1+n+1-2\right)$$
$$= \frac{n}{2}(2n^2+4n) = \underline{n^2(n+2)}$$

(8) 空間の点 $(-2,7,3)$ を通り，
平面 $\alpha:\ 3x-y+2z+6=0$ に垂直な直線の方程式を書け．[3 点]

方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{\frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-3}{2}}$$

(9) 空間のベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ．[4 点]

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$
$$= \frac{2-4-4}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{4+4+16}}$$
$$= \frac{-6}{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$
$$\underline{\theta = \frac{2}{3}\pi}$$

(10) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．[5 点]

$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

拡張された 2 項定理より

$$f(x) = 1 + \binom{\frac{2}{3}}{1}x + \binom{\frac{2}{3}}{2}x^2 + \binom{\frac{2}{3}}{3}x^2 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2!}\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^2$$
$$+ \frac{1}{3!}\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)x^3 + \cdots$$
$$= \underline{1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 + \cdots}$$

(11) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ の一般解を求めよ．[5 点]

$$\int\frac{dy}{y} = 2x\int dx$$

$$\log|y| = x^2 + C_1$$

$$y = \pm e^{x^2+C_1}$$

$$y = \pm e^{C_1}e^{x^2}$$

$\pm e^{C_1} = C$ として, $\underline{y = Ce^{x^2}}$

5. 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+6xy-3y^2$ の極値を求めよ. [7 点]

$$\begin{cases} f_x = 3x^2+6y=0 & \cdots \text{①} \\ f_y = 6x-6y=0 & \cdots \text{②} \end{cases} \quad \text{とする}$$

②より, $y=x$
①に代入して, $3x^2+6x=0$
$3x(x+2)=0$ より $x=0,\ -2$
$(x,y)=(0,0),\ (-2,-2)$

$f_{xx}=6x,\ f_{xy}=6,\ f_{yy}=-6$

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -36x-36$$

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき,

$$H(0,0)=\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - 36<0 \text{ より}$$

極値はとらない

(ii) $(x,y)=(-2,-2)$ のとき,

$$H(-2,-2)=\begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 72-36=36>0 \text{ より,}$$

極値をとる
$f_{xx}(-2,-2)=-12<0$ より, 極大値をとる
$f(-2,-2)=-8+24-12=4$

$\underline{(-2,-2) \text{ で極大値 } 4 \text{ をとる}}$

6. 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ. [7 点]

$|A-\lambda E|=0$ とすると,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(3-\lambda)(-1-\lambda)-5=0$
$\lambda^2-2\lambda-8=0$
$(\lambda-4)(\lambda+2)=0$
$\lambda=4,\ -2$
$\underline{\text{固有値は } 4,\ -2}$

(i) $\lambda=4$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とすると,}$$

$-x+5y=0$ より $x=5y$
$y=s$ とすると, $x=5s$
固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 5s \\ s \end{pmatrix} = \underline{s\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\ (s\neq 0)}$$

(ii) $\lambda=-2$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とすると,}$$

$x+y=0$ より $y=-x$
$x=t$ とすると, $y=-t$
固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = \underline{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ (t\neq 0)}$$

7. 関数 $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+1$ の増減表を作り, グラフをかけ. [6 点]

$y'=x^3-4x=x(x^2-4)$
$y'=0$ とすると $x=0,\ \pm 2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$