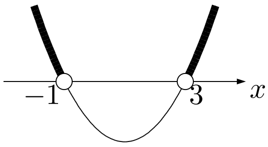
平成 29 年度 4 年生数学実力試験　2017.12.12

4–[　　　]　(　　　) 番　　氏名 ________________

1. 次の方程式・不等式を解け. [各 4 点]

(1) $x^2 - 2x - 3 \geqq 0$



$(x+1)(x-3) \geqq 0$

$\underline{x \leqq -1,\ 3 \leqq x}$

(2) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ とすると, $P(-1) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 3 & 10 \\ & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x+1)(x^2 - 7x + 10)$

$\quad = (x+1)(x-2)(x-5)$

よって, 解は $\underline{x = -1,\ 2,\ 5}$

(3) $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$

真数の条件より, $x - 1 > 0$, $x - 3 > 0$ なので,

$x > 3$

$\log_2(x-1)(x-3) = \log_2 2^3$

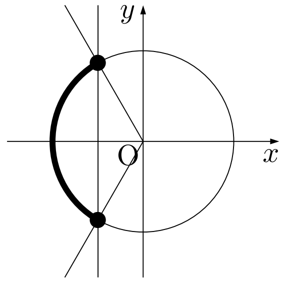
$x^2 - 4x + 3 = 8$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$ よって, $x = 5,\ -1$

$x > 3$ より, $\underline{x = 5}$

(4) $\cos\theta \leqq -\dfrac{1}{2}$　　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$



$\underline{\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{4}{3}\pi}$

2. 導関数を求めよ. [各 4 点]

(1) $y = \sqrt{e^{2x} + 1}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}} \cdot (e^{2x}+1)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}} \cdot 2e^{2x}$$

$$= \underline{\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}}$$

(2) $y = \dfrac{3x-2}{x^2+1}$

$$y' = \frac{3(x^2+1) - (3x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \underline{\frac{-3x^2 + 4x + 3}{(x^2+1)^2}}$$

3. 次の定積分・不定積分を求めよ. [各 4 点]

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^2 x\, dx$

$\sin x = u$ とすると, $\cos x\, dx = du$

$x : 0 \mapsto \dfrac{\pi}{3}$ のとき, $u : 0 \mapsto \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$与式 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^2\, du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

(2) $\displaystyle\int xe^{3x}\,dx \quad = \int x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx$

$$= x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int (x)'\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

$$= \underline{\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C}$$

4. 次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y=2x^2-5x$ の接線で傾きが 3 であるものの方程式を求めよ．[5 点]

$y'=4x-5$

$4x-5=3$ と置くと, $x=2$

$x=2$ のとき, $y=8-10=-2$

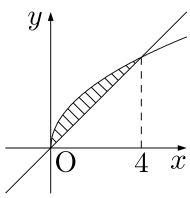
接線の方程式は

$y-(-2)=3(x-2)$ より,

$y=3x-6-2$

$\underline{y=3x-8}$

(2) 曲線 $y=2\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ とで囲まれた図形の面積を求めよ．[5 点]



$2\sqrt{x}=x$ とすると,

$4x=x^2$

$x(x-4)=0$

$x=0,\ 4$

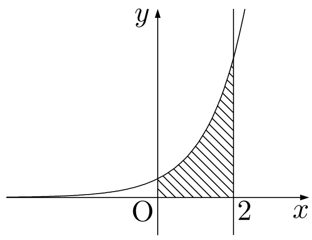
$$\int_0^4 (2\sqrt{x}-x)\,dx$$

$$= \int_0^4 (2x^{\frac{1}{2}}-x)\,dx = \left[2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 8 - 8 = \underline{\frac{8}{3}}$$

(3) 曲線 $y=e^x$ と直線 $x=2$, x 軸，y 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ．[5 点]

求める体積は



$$\pi\int_0^2 y^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^2 (e^x)^2\,dx$$

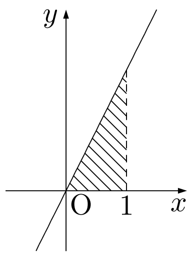
$$= \pi\int_0^2 e^{2x}\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = \underline{\frac{\pi}{2}\left(e^4-1\right)}$$

(4) 次の 2 重積分の値を求めよ．[5 点]

$$\iint_{\mathrm{D}} (2x^2-y)\,dx\,dy,$$

$$\mathrm{D}=\{(x,y)|0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2x\}$$



$$\int_0^1 \left\{\int_0^{2x} (2x^2-y)\,dy\right\}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{2x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(4x^3-2x^2\right)\,dx = \left[x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

(5) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．[5 点]

$f(x)=(x+1)^{\frac{1}{3}}$

拡張された 2 項定理より

$$f(x) = 1 + \binom{\frac{1}{3}}{1}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{3}}{3}x^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2!}\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)x^3 + \cdots$$

$$= \underline{1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \cdots}$$

(6) 次の行列式の値を求めよ. [4 点]

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -9 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-8+45) = \underline{74}$$

(7) 次の和を求めよ. 答えは因数分解した形にしておくこと. [5 点]

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= \frac{n}{6}\{(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 6\}$$

$$= \frac{n}{6}\left(2n^2+3n+1-3n-3+6\right)$$

$$= \frac{n}{6}(2n^2+4) = \underline{\frac{n}{3}(n^2+2)}$$

(8) 空間の直線 $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{-2}$ と, 平面 $2x+3y-2z=2$ の交点となる点の座標を求めよ. [4 点]

$\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{-2} = t$ とすると,

$$\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = -t+1 \\ z = -2t+5 \end{cases}$$

$2x+3y-2z=2$ に代入して

$2(2t-3)+3(-t+1)-2(-2t+5)=2$

$4t-6-3t+3+4t-10=2$

$5t=15,\ t=3$

したがって, $x=3,\ y=-2,\ z=-1$

交点は $\underline{(3,-2,-1)}$

(9) 平面ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ. [4 点]

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{-6+1}{\sqrt{9+1}\sqrt{4+1}} = \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \underline{\frac{3}{4}\pi}$$

5. 次の線形微分方程式の一般解を定数変化法で求めよ. [6 点]

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x \cdots ①$$

(i) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ とする

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$\log|y| = -2x + C_1$

$y = \pm e^{-2x+C_1}$

$y = \pm e^{C_1}e^{-2x}$

$\pm e^{C_1} = C$ として, $y = Ce^{-2x}$

(ii) $y = ue^{-2x}$ とすると, $y' = u'e^{-2x} - 2ue^{-2x}$

① に代入して,

$u'e^{-2x} - 2ue^{-2x} + 2ue^{-2x} = 3e^x$

$u'e^{-2x} = 3e^x$ より, $u' = 3e^{3x}$

$$u = \int 3e^{3x}\,dx = e^{3x} + C$$

(iii) $y = (e^{3x}+C)e^{-2x} = e^x + Ce^{-2x}$

求める解は $\underline{y = e^x + Ce^{-2x}}$

6. 2 変数関数 $f(x,y)=2x^3+6xy+3y^2-3x^2$ の極値を求めよ. [7 点]

$$\begin{cases} f_x = 6x^2+6y-6x=0 & \cdots ① \\ f_y = 6x+6y=0 & \cdots ② \end{cases}$$ とする

②より, $y=-x$
①に代入して, $6x^2-6x-6x=0$
$6x(x-2)=0$ より $x=0,\ 2$
$(x,y)=(0,0),\ (2,-2)$

$f_{xx}=12x-6,\ f_{xy}=6,\ f_{yy}=6$
$H(x,y)=6(12x-6)-6^2=72x-72$

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき,
$H(0,0)=-72<0$ より
極値はとらない

(ii) $(x,y)=(2,-2)$ のとき,
$H(2,-2)=144-72=72>0$ より, 極値をとる
$f_{xx}(2,-2)=24-6=18>0$ より, 極小値をとる
$f(2,-2)=16-24+12-12=-8$

$(2,-2)$ で極小値 -8 をとる

7. 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ. [7 点]

$|A-\lambda E|=0$ とすると,
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0$$
$(1-\lambda)(-2-\lambda)-10=0$
$\lambda^2+\lambda-12=0$
$(\lambda+4)(\lambda-3)=0$
$\lambda=-4,\ 3$
固有値は $-4,\ 3$

(i) $\lambda=-4$ のとき,
$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると,
$x+y=0$ より $y=-x$
$x=s$ とすると, $y=-s$
固有ベクトルは
$\begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ (s\neq 0)$

(ii) $\lambda=3$ のとき,
$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると,
$-2x+5y=0$ より $y=\dfrac{2x}{5}$
$x=5t$ とすると, $y=2t$
固有ベクトルは
$\begin{pmatrix} 5t \\ 2t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\ (t\neq 0)$

8. 関数 $y=x^4-4x^3+15$ の増減表を作り, グラフをかけ. [6 点]

$y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
$y'=0$ とすると $x=0$ (2 重解), 3

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	15	↘	-12	↗