

学年・科() () 番氏名()

1. 次の公式の右辺を正しく直せ。ただし、 x, y は任意の実数、 M, N は正の実数、 a は1でない正の実数とする。[各4点]

(1) $(x-y)^2 = x^2 - y^2$ $x^2 - 2xy + y^2$

(2) $a^x \times a^y = a^{xy}$ a^{x+y}

(3) $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$
 $\sin x \cos y + \cos x \sin y$

(4) $\log_a(M \times N) = \log_a M \times \log_a N$
 $\log_a M + \log_a N$

2. 導関数を求めよ。[各4点]

(1) $y = \frac{3x-5}{x+2}$
 $y' = \frac{3(x+2) - (3x-5)}{(x+2)^2}$
 $= \frac{11}{(x+2)^2}$

(2) $y = \log(1 + \sin^2 x)$
 $y' = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}$

3. 次の定積分、不定積分を求めよ。[各4点]

(1) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx$
 $= \int_1^2 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt$
 $= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^2$
 $= \frac{1}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$t = x^2 + 1$
 $dt = 2x dx$
 $x dx = \frac{1}{2} dt$

x	0	$\sqrt{3}$
t	1	4

(2) $\int x e^{-x} dx = \int x (-e^{-x})' dx$
 $= -x e^{-x} + \int (+e^{-x}) dx$
 $= -x e^{-x} - e^{-x} + C$

4. 次の方程式を解け。[各4点]

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
 試しに $f(x)$ とおくと, $f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$
 $f(x)$ は $(x-1)$ で割り切れる。

$f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$
 $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$
 $x = 1, 2, 3$

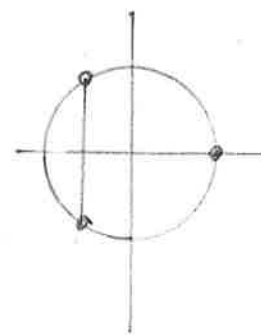
(2) $\log_2(x^2 - 9) - \log_2 x = 3$

$\log_2 \frac{x^2 - 9}{x} = 3$
 $\frac{x^2 - 9}{x} = 2^3 = 8$
 $x^2 - 9 = 8x$
 $x^2 - 8x - 9 = 0$
 $(x-9)(x+1) = 0$ $x = 9, -1$
 $\therefore x = 9$

(3) $2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)

$(2\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) = 0$

$\cos \theta = -\frac{1}{2}, 1$
 $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$



5. 次の問に答えよ。[4×7+5×3点]

(1) 曲線 $y = \sin x$ 上の $x = \frac{\pi}{3}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

$y(\frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $y' = \cos x, y'(\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\pi$

(2) 2曲線 $y = x^2$ と $y = 6x - x^2$ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$x^2 = 6x - x^2$
 $2x^2 - 6x = 0$
 $x(x-3) = 0$
 $\therefore x = 0, 3$
 $y = 6x - x^2 = x(6-x)$
 $\int_0^3 (6x - x^2 - x^2) dx = \int_0^3 (6x - 2x^2) dx$
 $= \left[3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^3 = 27 - 18 = 9$

(3) 曲線 $y = 1 + \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を x 軸の回りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x + \cos^2 x) dx$
 $= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx$
 $= 2\pi \left[\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
 $= 2\pi \left(\frac{3}{4}\pi + 2 \right) = \frac{\pi}{2}(3\pi + 8)$

(4) 次の2重積分の値を求めよ。

$\iint_D (x-y)^2 dx dy, D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$
 $\int_{x=0}^1 \int_{y=x}^{y=2x} (x-y)^2 dy dx$
 $= \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(x-y)^3 \right]_{y=x}^{y=2x} dx$
 $= \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 dx$
 $= \left[\frac{1}{12}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$

(5) 6つの数字 1, 2, 2, 3, 3, 3 を1列に並べる場合の数をもとめよ。

1が並ぶ 2が並ぶ
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $6C_1 \times 5C_2 = 6 \times \frac{5 \times 4}{2} = 60$ 通り

(6) $f(x) = e^x \sin x$ のマクローリン展開を、 x^3 の項まで求めよ。

$f(0) = 0$
 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x, f'(0) = 1$
 $f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x$
 $= 2e^x \cos x, f''(0) = 2$
 $f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x, f'''(0) = 2$
 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots$
 $= x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \dots$

(7) 次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

(8) 初項3、公比2の等比数列が、 10^{10} を超えるのは第何項からか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ を用いよ。

$$3 \times 2^{n-1} > 10^{10} \quad \text{両辺の常用対数を取り}$$

$$\log 3 + (n-1) \log 2 > 10$$

$$0.477 + (n-1) \times 0.301 > 10$$

$$(n-1) \times 0.301 > 9.523$$

$$n > 1 + \frac{9.523}{0.301} = 32.6 \quad \text{第33項}$$

(9) 次の和を総和記号 Σ を使って表せ。また、 Σ を用いた計算により和を求めよ。

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 18 \times 20$$

$$= \sum_{k=1}^{18} k(k+2) = \sum_{k=1}^{18} (k^2 + 2k)$$

$$= \frac{3 \times 18 \times 19 \times 37}{8} + 2 \times \frac{18 \times 19}{2}$$

$$= 19 \times (111 + 18) = 19 \times 129$$

$$= 2451$$

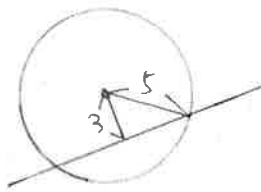
(10) 空間の平面 $x-2y+2z-9=0$ と球 $x^2+y^2+z^2=25$ との交わりである円の半径を求めよ。

球の中心(原点)と平面との距離は

$$\frac{|0-0+0-9|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{3} = 3$$

球の半径5より
求める円の半径は

$$\sqrt{25-9} = 4$$



6. 次の線形微分方程式の一般解を定数変化法により求めよ。

$$x \frac{dy}{dx} + y = \cos 2x \quad \text{--- ① [6点]}$$

[第1段] 補助方程式 $x \frac{dy}{dx} + y = 0$

$$x dy = -y dx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x} dx$$

$$\log y = -\log x + C$$

$$\log y + \log x = C \quad \log xy = C$$

$$xy = e^C \quad e^C \text{ を } C \text{ とし、} y = \frac{C}{x}$$

[第2段] C を関数 $u(x)$ と置きかえ、

$$y = \frac{u}{x}, \quad y' = \frac{u'x - u}{x^2}$$

① $\wedge$ 代入

$$x \cdot \frac{u'x - u}{x^2} + \frac{u}{x} = \cos 2x$$

$$u' = \cos 2x \quad \therefore u = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\therefore y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C \right)$$

7. 2変数関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 1$ の極値を求めよ。[6点]

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y = 0 & \text{--- ①} \\ f_y = 3y^2 + 3x = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① $3y = -x^2$ ② $x = -y^2$

$$3x^4 + 3x = 0 \quad x = 0, -1$$

$$(x,y) = (0,0), (-1,-1)$$

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

(i) $(x,y) = (0,0)$ とき

$$H(0,0) = -9 \quad \text{極小値とす}$$

(ii) $(x,y) = (-1,-1)$ とき

$$H(-1,-1) = 36 - 9 = 27$$

$$f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0 \quad \text{極大}$$

$\wedge$ 上より

$$(x,y) = (-1,-1) \text{ とき 極大値}$$

$$f(-1,-1) = -1 -1 + 3 + 1 = 2 \text{ を取る。}$$

8. 関数 $y = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$ の増減表を作り、グラフを描け。[6点]

$$y' = \frac{1}{2}x^3 - 2x = 0$$

$$x^3 - 4x = 0 \quad x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, \pm 2$$

x	...	-2	...	0	...	2	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	0	↗	2	↘	0	↗

9. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトル

を求めよ。[7点]

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-1) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \quad \lambda = 3, 1$$

(i) $\lambda = 1$ とき

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x+y+z=0 \\ z=-x-y \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(s,t) \neq (0,0)$$

(ii) $\lambda = 3$ とき

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ z=0, x-y=0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0)$$

