平成２７年度　４年生数学実力試験

学年・科(　　)(　　)番氏名(　　　　　　)

１．次の方程式、不等式を解け。[各４点]

(1) $100^x < 0.001$

$10^{2x} < 10^{-3}$

$2x < -3$

$x < -\frac{3}{2}$

(2) $x^3-3x^2+6x-4=0$

左辺を $f(x)$ とおくと、$f(1)=0$

因数定理より $f(x)$ は $(x-1)$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 6 & -4 \\ 1 & & 1 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2x+4)=0$

$x=1,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(3) $\log_2(x+1)+\log_2(x+5)=5$

$\log_2(x+1)(x+5)=\log_2 2^5$

$(x+1)(x+5)=32$

$x^2+6x-27=0$

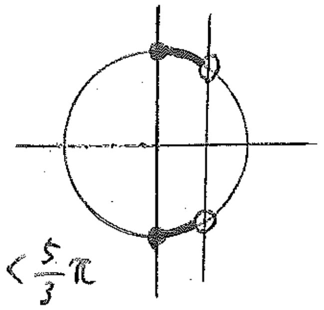
$(x+9)(x-3)=0$

$x=-9,\ 3$

真数条件 $0<x+1,\ 0<x+5$ より

$x=-9$ は不適 $\therefore x=3$

(4) $0 \leqq \cos\theta < \frac{1}{2}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$



$\frac{\pi}{3}<\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta<\frac{5}{3}\pi$

２．導関数を求めよ。[各４点]

(1) $y=\sin^3(2x)$

$y'=3\sin^2(2x)(\sin 2x)'$

$=3\sin^2(2x)(\cos 2x)\cdot 2$

$=6\sin^2(2x)\cos(2x)$

(2) $y=\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$

$y'=\dfrac{e^x(e^x+e^{-x})-e^x(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{e^{2x}+1-e^{2x}+1}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{2}{(e^x+e^{-x})^2}$

３．次の定積分、不定積分を求めよ。[各４点]

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}dx$

$t=1+\sin x$

$dt=\cos x\,dx$

$$\begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1\to 2 \end{array}$$

$=\int_1^2\frac{1}{t}dt$

$=[\log t]_1^2$

$=\log 2$

/28

(2) $\int xe^{2x}dx = \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$=\frac{x}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

４．次の問に答えよ。[各５点]

(1) 曲線 $y=\tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ の接線で、傾きが2であるものをすべて求めよ。

$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=2$　　$\cos^2 x=\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ より $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore x=\pm\frac{\pi}{4}$

点 $\left(\frac{\pi}{4},\tan\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ をとおり、傾き2

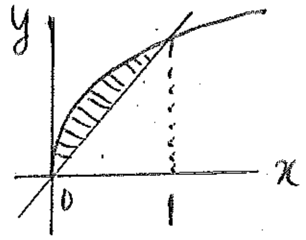
$y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$　$\therefore y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

点 $\left(-\frac{\pi}{4},\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{4},-1\right)$ をとおり傾き2

$y=2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$　$\therefore y=2x+\frac{\pi}{2}-1$

$y=2x-\frac{\pi}{2}+1,\ y=2x+\frac{\pi}{2}-1$

(2) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ とで囲まれた図形の面積を求めよ。



$\sqrt{x}=x$

$x=x^2$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$　　$x=0,1$

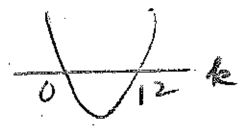
$\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(3) 放物線 $y=3x^2+kx+k$ のグラフが x 軸と異なる２点で交わるような、定数 k の値の範囲を求めよ。

$D=k^2-12k>0$

$k(k-12)>0$



$k<0,\ 12<k$

(4) 微分方程式 $xy'+y+1=0$ を解け。

$x\frac{dy}{dx}=-(y+1)$

$\frac{dy}{y+1}=-\frac{dx}{x}$

$\log|y+1|=-\log|x|+C$

$\log|y+1||x|=C$

$(y+1)x=\pm e^C$

$\pm e^C$ を改めて C と置くと、

$(y+1)x=C$　$\therefore y=\frac{C}{x}-1$

(5) $f(x)=\sqrt{1+x}$ のマクローリン展開を、x^3 の項まで求めよ。

$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$,　$f(0)=1$

$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$,　$f'(0)=\frac{1}{2}$

$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$,　$f''(0)=-\frac{1}{4}$

$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$,　$f'''(0)=\frac{3}{8}$

$\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots$

/29

(6) 次の行列式を因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} a&a&a\\ a&b&b\\ a&b&c\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&b\\a&b&c\end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&b-a\\a&b-a&c-a\end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix}b-a&b-a\\b-a&c-a\end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix}1&b-a\\1&c-a\end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)(c-\cancel{a}-b+\cancel{a}) = \underline{a(a-b)(b-c)}$$

(7) 和を求めよ。答えは因数分解した形にしておくこと。

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{3}{6}n(n+1) + \frac{12}{6}n$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 12\}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2+\cancel{3n}+1-\cancel{3n}+9) = \underline{\frac{1}{3}n(n^2+5)}$$

(8) 空間の直線 $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = z+3$ と平面 $x-y+z=0$ との交点を求めよ。

$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = z+3 = t$ とおくと

$x=3t,\ y=2t+1,\ z=t-3$

これらを平面の式へ代入

$3t-2t-1+t-3=0 \quad t=2$

$\therefore (x,y,z) = \underline{(6,5,-1)}$

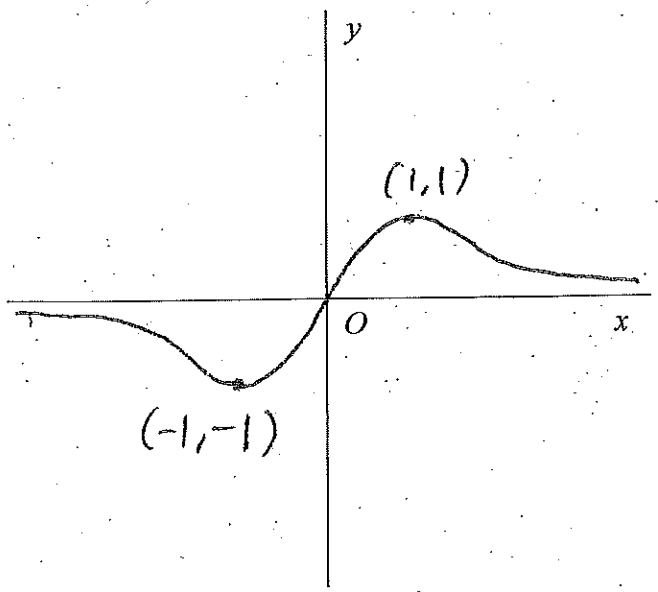
5．関数 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ の増減表を作り、グラフを描け。[7点]

$$y' = \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \qquad x=\pm 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = 0$$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
y'	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y	0	↘	-1	↗	1	↘	0



/22

6．2変数関数 $f(x,y)=x^3+6xy+y^3$ の極値を求めよ。[7点]

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+6y=0,\quad y=-\frac{1}{2}x^2$ —①

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+6x=0,\quad x=-\frac{1}{2}y^2$ —②

①を②へ代入 $x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4$

$x^4+8x=0 \quad x(x^3+8)=0,\ x=0,-2$

$(x,y)=(0,0),(-2,-2)$

$$H=\begin{vmatrix}6x&6\\6&6y\end{vmatrix} = 36(xy-1)$$

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき,

$H(0,0)=-36<0$ 極値とらず

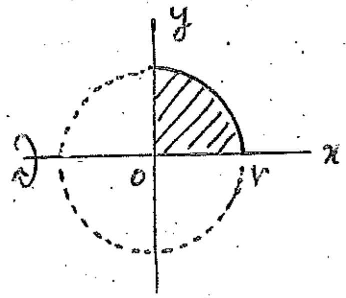
(ii) $(x,y)=(-2,-2)$ のとき

$H(-2,-2)=108>0$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2)=-12<0$ 極大

$\underline{(x,y)=(-2,-2)\text{のとき 極大値 } z=8 \text{ をとる。}}$

7．半径 r の球の体積が、$\frac{4\pi r^3}{3}$ である事を証明せよ。[7点]



原点中心 半径 r の円

$x^2+y^2=r^2$

の第1象限の部分

を x 軸のまわりに回転してできる回転体

の体積×2である。

$$V=2\pi\int_0^r y^2dx = 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

8．行列 $A=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}$ について、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような2次正則行列を求めよ。[7点]

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&4\\3&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$(1-\lambda)(2-\lambda)-12=0$

$\lambda^2-3\lambda-10=0$

$(\lambda-5)(\lambda+2)=0 \qquad \lambda=5,-2$

(i) $\lambda=5$ のとき

$$\begin{bmatrix}-4&4\\3&-3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \therefore x=y$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$ (kは任意)

(ii) $\lambda=-2$ のとき

$$\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$ (lは任意)

よって

$$\underline{P=\begin{pmatrix}1&4\\1&-3\end{pmatrix}}$$

/21