平成 26 年度　数学実力試験　　4 年　　科　　番氏名

[1]次の方程式および不等式を解け．
(4×4=16 点)

(1) $9^{2-3x} > 27$

$$3^{2(2-3x)} > 3^3$$
$$2(2-3x) > 3$$
$$4-6x > 3$$
$$6x < 1$$
$$x < \frac{1}{6}$$

(2) $x^3-3x^2-x+6=0$

$x=2$ とすると

$$2^3-3\cdot 2^2-2+6=0$$

$$\begin{array}{r} x^2-x-3 \\ x-2 \,\big)\, x^3-3x^2-x+6 \\ x^3-2x^2 \\ \hline -x^2-x \\ -x^2+2x \\ \hline -3x+6 \\ -3x+6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2-x-3)=0$$
$$x=2,\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 3}}{2}$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

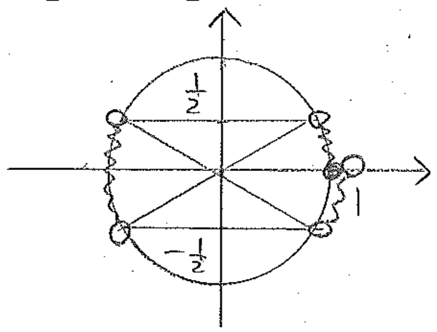
(3) $\log_2(x-6)+\log_2 x=4$

$$\log_2(x-6)x=4$$
$$(x-6)x=2^4$$
$$x^2-6x=16$$
$$x^2-6x-16=0$$
$$(x-8)(x+2)=0$$
$$x=8,\ -2$$

$x=-2$ は不適

答　$x=8$

(4) $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$　　$(0\leqq x<2\pi)$



$$\begin{cases} 0\leqq x<\frac{\pi}{6} \\ \frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{6}\pi \\ \frac{11}{6}\pi<x<2\pi \end{cases}$$

[2]導関数を求めよ．(4×2=8 点)

(1) $y=\sin^2 5x$

$$y'=2\sin 5x\cos 5x\cdot 5$$
$$=10\sin 5x\cos 5x$$

(2) $y=\log\left|\frac{2x+5}{3x-1}\right|$

$$y=\log|2x+5|-\log|3x-1|$$
$$y'=\frac{2}{2x+5}-\frac{3}{3x-1}$$
$$=\frac{2(3x-1)-3(2x+5)}{(2x+5)(3x-1)}$$
$$=\frac{-17}{(2x+5)(3x-1)}$$

[3]次の不定積分，定積分を求めよ．
(4×2=8 点)

(1) $\int(e^{2x}-e^{-2x})dx$ $=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

C：任意定数

(2) $\int_1^e \log x dx$ $=\left[x\log x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx$

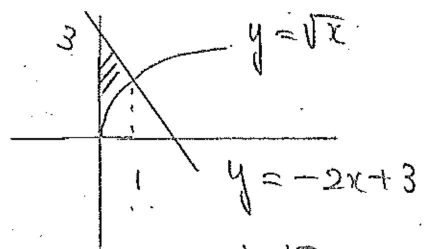
$$=e-\left[x\right]_1^e$$
$$=e-(e-1)$$
$$=1$$

[4]次の問いに答えよ．(5×8=40 点)

(1) 2 次関数 $y=x^2-4x-1$ と直線 $y=-2x+k$ が 2 点で交わるような k の範囲を求めよ．

$$x^2-4x-1=-2x+k$$
$$x^2-2x-(k+1)=0$$
$$D=4+4(k+1)>0$$
$$k+1>-1$$
$$k>-2$$

(2) $y=\sqrt{x}$，$y=-2x+3$ のグラフ及び y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．



交点の x 座標は

$$\sqrt{x}=-2x+3$$
$$x=(-2x+3)^2$$
$$4x^2-13x+9=0$$
$$(x-1)(4x-9)=0\quad x=1,\ \frac{9}{4}$$

$\frac{9}{4}$ は不適　$x=1$

$$S=\int_0^1(-2x+3-\sqrt{x})dx$$
$$=\left[-x^2+3x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

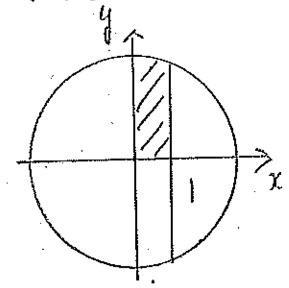
(3) $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ のグラフと y 軸との交点における接線の方程式を求めよ．

y 軸との交点は $(0,-1)$

$$y'=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$
$$y'(0)=1$$

接線　$y=x-1$

(4) $x^2+y^2\leqq 9$，$0\leqq x\leqq 1$ で表される領域を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．



$$V=\pi\int_0^1(9-x^2)dx$$
$$=\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\pi\left(9-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{26}{3}\pi$$

(5) $y=\sqrt[3]{1+x}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

$$y=1+\binom{\frac{1}{3}}{1}x+\binom{\frac{1}{3}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{3}}{3}x^3+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{1\cdot 2}x^2$$
$$+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\cdots$$

(6)次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)(a-b)^3$$

(7)100 以上 600 以下の 7 の倍数すべての和を求めよ.

$100 \leqq 7n \leqq 600$

$14.2\cdots \leqq n \leqq 85.7\cdots$

$n = 15, 16, \cdots, 85$

初項 7×15, 末項 7×85

項数 71 の等差数列の和

$$\frac{7\times15+7\times85}{2}\times71 = 24850$$

(8)空間の 2 平面 $2x-2y+z+1=0$, $y-z+3=0$ のなす角を求めよ.

2平面の法線ベクトルは

$\vec{a} = (2, -2, 1)$

$\vec{b} = (0, 1, -1)$

角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\theta = 135°$ 答 45°

[5]関数 $y=\sqrt{x}\log x$ の増減を調べグラフをかけ.(7点)

$y = \sqrt{x}\log x$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

$y' = 0$ とおくと $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

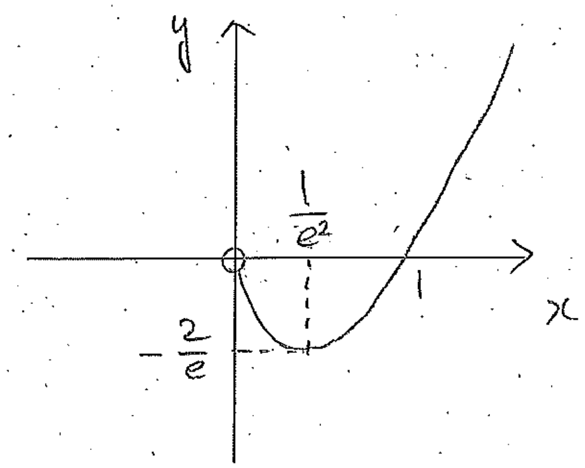
$y(e^{-2}) = e^{-1}\times(-2) = -\dfrac{2}{e}$

また原点の近くでは

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} y = \infty$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	$-\frac{2}{e}$	↗



[6] 2 変数関数 $f(x,y)=x^3-3x+y^2+2y+3$ の極値を求めよ.(7点)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-3,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-3=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y+2=0 \end{cases}$$ の解は

$(x,y) = (\pm1, -1)$

(i) $(1,-1)$ のとき $H(1,-1)=12>0$

極値をとる

$f_{xx}(1,-1) = 6 > 0$ 極小

極小値 $1-3+1-2+3=0$

(ii) $(-1,-1)$ のとき $H(-1,-1)=-12$

極値をとらない.

答 $(1,-1)$ のとき極小値 0 をとる.

[7] $u=xy$ と変数変換することにより,微分方程式 $xy'+y=3x^2$ を解け.(7点)

$y = \dfrac{u}{x}$

$y' = \dfrac{u'x-u}{x^2}$

これらを元の微分方程式に代入して

$$x\cdot\frac{u'x-u}{x^2} + \frac{u}{x} = 3x^2$$

$u'x = 3x^3$

$u' = 3x^2$

$u = \int 3x^2\,dx = x^3+C$

$xy = x^3+C$ (C 任意定数)

[8] 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について,$P^{-1}AP$ が対角行列となるような2次の正則行列 P を求めよ.(7点)

固有値を求める

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(4-\lambda)(3-\lambda)-2=0$

$\lambda^2-7\lambda+10=0$

$(\lambda-2)(\lambda-5)=0$

$\lambda = 2, 5$

それぞれの固有ベクトルを求めると

$\lambda=2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y = -2x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\quad (k\neq0)$$

$\lambda=5$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x+y=0$

$y = x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\quad (l\neq0)$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば良い