

注意: 問題用紙をつねに半分に折った状態で解答すること

[1]次の方程式および不等式を解け。

(4×4=16点)

(1) $\sqrt{27} < 9^x$

$$(3^3)^{\frac{1}{3}} < 3^{2x}$$

$$3^{\frac{3}{3}} < 3^{2x}$$

$$2x > \frac{3}{2}$$

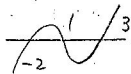
$$x > \frac{3}{4}$$

2) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 < 0$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad \text{と} \quad x <$$

$$P(1) = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ x-1 \overline{) x^3 - 2x^2 - 5x + 6} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -x^2 - 5x \\ \underline{-x^2 + x} \\ -6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$



$$P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

$$= (x-1)(x-3)(x+2)$$

$$P(x) < 0 \quad \text{の解は} \quad x < -2, \quad 1 < x < 3$$

(3) $\log_{10}(x-1) + \log_{10}(x-4) = 1$

$$\log_{10}(x-1)(x-4) = 1$$

$$(x-1)(x-4) = 10$$

$$x^2 - 5x + 4 = 10$$

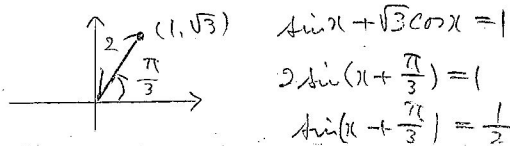
$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x-6)(x+1) = 0$$

$$x = 6, -1$$

$x = -1$ は真数が負に有る
の2"不備 $x = 6$

(4) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \quad (0 \leq x < 2\pi)$



$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$$

(n 整数)

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$0 \leq x < 2\pi \quad \text{より}$$

$$x = \frac{11}{6}\pi, \quad \frac{\pi}{2}$$

[2]導関数を求めよ。(4×2=8点)

(1) $y = e^{3x} - e^{-3x}$

$$y' = 3e^{3x} + 3e^{-3x}$$

(2) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{\frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

[3]次の不定積分, 定積分を求めよ。

(4×2=8点)

(1) $\int (2x+1)^5 dx$

$$\begin{aligned} \int (2x+1)^5 dx &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} (2x+1)^6 + C \\ &= \frac{1}{12} (2x+1)^6 + C \end{aligned}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

[4]次の問いに答えよ。(5×8=40点)

(1)放物線 $y = x^2 - 4x + a$ と直線 $y = 2ax - 2$ が交わらないような定数 a の範囲を求めよ。

$$x^2 - 4x + a = 2ax - 2$$

$$x^2 - (4+2a)x + (a+2) = 0$$

$$D = (4+2a)^2 - 4(a+2) < 0$$

$$a^2 + 4a + 4 - a - 2 < 0$$

$$a^2 + 3a + 2 < 0$$

$$(a+1)(a+2) < 0$$

$$-2 < a < -1$$

(2)曲線 $y = x^3 - 2x + 1$ の y 軸との交点における接線の方程式を求めよ。

$$y = x^3 - 2x + 1 \quad \text{と} \quad y \text{ 軸との交点}$$

$$\text{は} \quad (0, 1)$$

$$y' = 3x^2 - 2$$

$$y'(0) = -2$$

接線は

$$y - 1 = -2x$$

$$y = -2x + 1$$

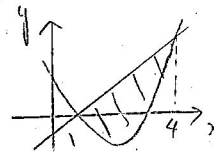
(3)放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と直線 $y = x - 1$ とで囲まれた領域の面積を求めよ。

放物線と直線の交点の座標は

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1, 4$$



面積は

$$\int_1^4 \{ (x-1) - (x^2 - 4x + 3) \} dx$$

$$= - \int_1^4 (x^2 - 5x + 4) dx$$

$$= - \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 4x \right]_1^4 = \frac{9}{2}$$

(4)半径 r の球の体積が $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ となることを証明せよ。

(証明) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させた立体の体積が $\frac{4\pi r^3}{3}$ であることを示せば良い。

$$\begin{aligned} \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

(終)

(5)直線 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4}$ と

平面 $x - 3y + 2z + 7 = 0$ の交点を求めよ。

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4} = t \quad \text{と} \quad x = 3t + 1$$

$$y = 2t + 4$$

$$z = 4t - 3$$

$$(3t+1) - 3(2t+4) + 2(4t-3) + 7 = 0$$

$$5t - 10 = 0, \quad t = 2$$

$$\text{交点} (7, 8, 5)$$

(6) 次の行列式を因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+b & a & b \\ 1+a+b & 1 & b \\ 1+a+b & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a+b) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a+b) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & b-a & 1-b \end{vmatrix}$$

$$= (1+a+b)(1-a)(1-b)$$

(7) 次の和を求めよ。

$1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \dots$ (第 n 項)

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot 2k = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k$$

$$= 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1)$$

$$= \frac{1}{3} n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(4n-1)$$

(8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ。

$$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)x^2 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

[5] 関数 $y = x^4 + 4x^3$ の増減表とグラフをかけ。

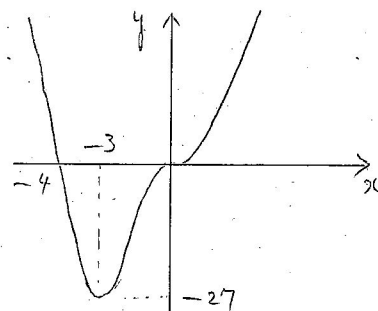
(7 点)

$$y' = 4x^3 + 12x^2$$

$$= 4x^2(x+3)$$

$$y' = 0 \text{ の解は } x = 0, -3$$

x	$\dots$	-3	$\dots$	0	$\dots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow$	-27	$\nearrow$	0	$\nearrow$



[6] 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$ の極値を求めよ。(7 点)

$$f_x = 3x^2 - 6x, \quad f_y = 2y$$

$$f_{xx} = 6x - 6, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 2$$

$$H(x, y) = f_{xx} + f_{yy} - \{f_{xy}\}^2 = 12(x-1)$$

$$\begin{cases} f_x = 3x(x-2) = 0 \\ f_y = 2y \end{cases}$$

$$\text{の解は } (x, y) = (0, 0), (2, 0)$$

$$H(0, 0) = -12 < 0 \text{ より } (0, 0) \text{ は}$$

極値を有する。

$$H(2, 0) = 12 > 0, \quad f_{xx}(2, 0) = 6$$

より

$$(0, 2) \text{ での極小値 } f(2, 0) = -4$$

である。

[7] 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに属する

固有ベクトルを求めよ。(7 点)

(解) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

固有値は $\lambda = 1, 3$

(i) $\lambda = 1$ に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (任意)} \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

(ii) $\lambda = 3$ に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (任意)} \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

(終)

[8] 微分方程式 $(x+y)y' = 3x-y$ を解け。(7 点)

[ヒント: $y = ux$ と置く]

(解) $y = ux$ とおくと

$$y' = (u'x + u)$$

$$(x+ux)(u'x+u) = 3x-ux$$

$$(1+u)(u'x+u) = 3-u$$

$$u'x = \frac{3-u}{1+u} - u$$

$$= \frac{3-u-u-u^2}{1+u}$$

$$= -\frac{u^2+2u-3}{u+1}$$

$$\frac{(u+1)du}{u^2+2u-3} = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{u+1}{(u+3)(u-1)} du = -\frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u+3} + \frac{1}{u-1} \right) du = -\frac{1}{x} dx$$

$$\left(\frac{1}{u+3} + \frac{1}{u-1} \right) du = -\frac{2}{x} dx$$

$$\int \left(\frac{1}{u+3} + \frac{1}{u-1} \right) du = -\int \frac{2}{x} dx$$

$$\log(u+3) + \log(u-1) = -2 \log x + C$$

$$(u+3)(u-1) = \frac{A}{x^2} \quad (A = e^C)$$

$$x^2(u+3)(u-1) = A$$

$$(y+3x)(y-x) = A$$

A 任意定数

(終)