

注意. 問題用紙をつねに半分に折った状態で解答すること.

[1] 次の方程式または不等式を解け.  $[4 \times 4 = 16 \text{ 点}]$

(1)  $8^x < 16$

解答例

$$2^{3x} < 2^4 \text{ より } 3x < 4$$

$$\text{よって, } x < \frac{4}{3}$$

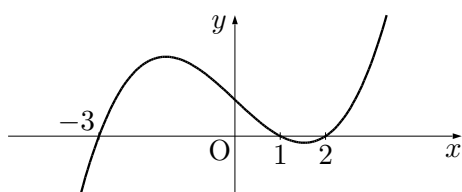
(2)  $x^3 - 7x + 6 > 0$

解答例

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 \text{ とすると, } f(1) = 0$$

よって因数定理より

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x^2 + x - 6) \\ &= (x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$



$$f(x) > 0 \text{ より } -3 < x < 1, 2 < x$$

(3)  $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

解答例

真数条件より  $x > 0$  に注意する.

$$\log_2 x(x+2) = \log_2 8 \text{ より}$$

$$x(x+2) = 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$$x > 0 \text{ より, } x = 2$$

(4)  $\sin 2x = \cos x \quad (0 \leq x < 2\pi)$

解答例

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ より}$$

$$2 \sin x \cos x = \cos x$$

$$\therefore \cos x(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\text{よって, } \cos x = 0 \text{ または } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ であるから,}$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

[2] 導関数を求めよ.  $[4 \times 2 = 8 \text{ 点}]$

(1)  $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

解答例

$$y' = \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(2)  $y = e^{3x} \sin 2x$

解答例

$$\begin{aligned} y' &= 3e^{3x} \sin 2x + e^{3x} 2 \cos 2x \\ &= e^{3x} (3 \sin 2x + 2 \cos 2x) \end{aligned}$$

[3] 次の不定積分, 定積分を求めよ.  $[4 \times 2 = 8 \text{ 点}]$

(1)  $\int x \log x \, dx$

解答例

$$\begin{aligned} \int x \log x \, dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left( x^2 \log x - \int x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \left( \log x - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$(2) \int_1^e \frac{\log x}{x} dx$$

解答例

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\log x}{x} dx &= \left[ \frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} \left( (\log e)^2 - (\log 1)^2 \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[4] 次の問いに答えよ． [5 × 8 = 40 点]

- (1) 2 次方程式  $x^2 + (m+3)x + 4m = 0$  が異なる 2 つの実数解をもつような定数  $m$  の範囲を求めよ．

解答例

与えられた 2 次方程式の判別式を  $D$  とすると、

$$\begin{aligned} D &= (m+3)^2 - 16m \\ &= m^2 - 10m + 9 \\ &= (m-1)(m-9) > 0 \end{aligned}$$

よって、 $m < 1, 9 < m$

- (2) 曲線  $y = \frac{1}{x^2}$  の  $x = 1$  に対応する点における接線の方程式を求めよ．

解答例

$$y' = -\frac{2}{x^3}$$

よって  $x = 1$  のとき、 $y = 1, y' = -2$

したがって求める接線の方程式は

$$y - 1 = -2(x - 1)$$

$$\therefore y = -2x + 3$$

- (3) 放物線  $y = 2x^2 - 3x$  と直線  $y = x + 6$  とで囲まれた領域の面積を求めよ．

解答例

$$2x^2 - 3x = x + 6 \text{ より, } x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\therefore (x-3)(x+1) = 0$$

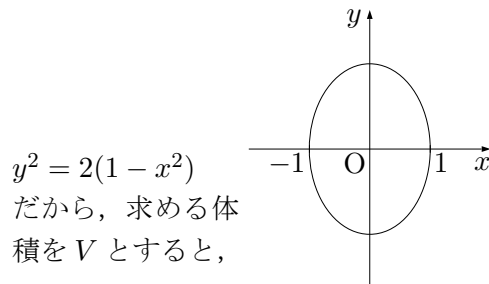
よって共有点の  $x$  座標は  $x = -1, 3$

したがって求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx \\ &= \left[ -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3 = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

- (4) 楕円  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

解答例



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 y^2 dx = 2\pi \int_0^1 y^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^1 2(1-x^2) dx \\ &= 4\pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

- (5) 原点を通り平面  $3x - y + 2z + 14 = 0$  に垂直な直線と、この平面との交点を求めよ．

解答例

平面の法線ベクトル  $(3, -1, 2)$  を方向ベクトルとし、原点を通る直線は  $\frac{x}{3} = -y = \frac{z}{2}$  であるから、その媒介変数表示は

$$x = 3t, y = -t, z = 2t$$

これを平面の方程式に代入して、

$$3 \cdot 3t - (-t) + 2 \cdot 2t + 14 = 0 \text{ より } t = -1$$

従って交点の座標は  $(-3, 1, -2)$

(6) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

解答例

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} 0 & b-a \\ b-a & c-a \end{vmatrix} \\ &= -a(b-a)^2 \end{aligned}$$

(7) 次の和を求めよ.

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \cdots + n(n+2)$$

解答例

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \sum_{k=1}^n k(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+6) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \end{aligned}$$

(8)  $f(x) = \sqrt{1+x}$  のマクローリン展開を  $x^3$  の項まで求めよ.

解答例

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

拡張された二項定理で  $p = \frac{1}{2}$  とおけば,

$$\binom{p}{1} = \frac{1}{2},$$

$$\binom{p}{2} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{8},$$

$$\binom{p}{3} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{1}{16}$$

であるから,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$

[5] 関数  $y = e^{-x^2}$  の増減, 極値, 凹凸, および  $x \rightarrow \pm\infty$  のときの極限を調べてグラフをかけ. [7点]

|       |           |            |                       |            |     |            |                      |            |          |
|-------|-----------|------------|-----------------------|------------|-----|------------|----------------------|------------|----------|
| $x$   | $-\infty$ | $\cdots$   | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$   | $0$ | $\cdots$   | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$   | $\infty$ |
| $y'$  | +         | +          | +                     | +          | 0   | -          | -                    | -          | -        |
| $y''$ | +         | +          | 0                     | -          | -   | -          | 0                    | +          | +        |
| $y$   | 0         | $\nearrow$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$  | $\searrow$ | 1   | $\swarrow$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\nwarrow$ | 0        |

解答例

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

$$y' = 0 \text{ より } x = 0$$

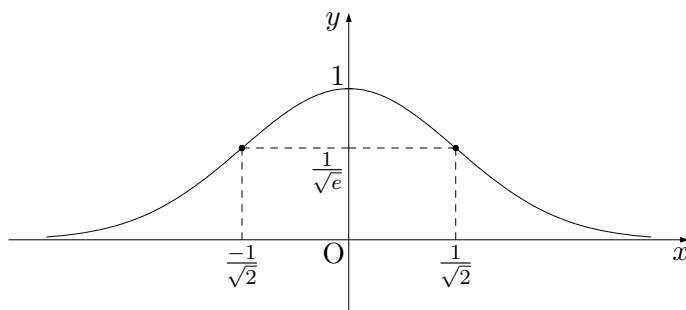
$$y'' = 0 \text{ より } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

また,  $e^{-x^2} > 0$  に注意して,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

これより上の増減表ができる.

また, そのグラフは以下のようになる.



[6] 2変数関数  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$  の極値を求めよ. [7点]

解答例

$$f_x = 3(x^2 - y), f_y = 3(y^2 - x)$$

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -3, f_{yy} = 6y$$

$$H(x, y) = 36xy - 9$$

$f_x = 0, f_y = 0$  において  $x, y$  について解くと

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1)$$

$H(0, 0) = -9 < 0$  だから,  $f(x, y)$  は原点で極値を取らない.

$H(1, 1) = 27 > 0$  であり,  $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$  であるから,  $f(x, y)$  は点  $(1, 1)$  で極小値  $f(1, 1) = -1$  を取る.

- [7] 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  の固有値とそれに属す固有ベクトルを求めよ. [7 点]

解答例

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(3 - \lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \\ \therefore \lambda &= 1, 2 \end{aligned}$$

$\lambda = 1$  のとき

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり  $x = -y$

よって固有ベクトルは  $k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ( $k$ : 任意)

$\lambda = 2$  のとき

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり  $y = -2x$

よって固有ベクトルは  $l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  ( $l$ : 任意)

- [8] 微分方程式  $y'' + 2y' + 10y = 2 \sin 2x$  を解け.

[7 点]

解答例

特性方程式は

$$s^2 + 2s + 10 = 0$$

であり, その解は  $s = -1 \pm 3i$  だから, 補助方程式の一般解は

$$y = e^{-x}(A \sin 3x + B \cos 3x)$$

である.

特殊解を求めるために

$$y_1 = a \sin 2x + b \cos 2x \quad (a, b \text{ は定数})$$

とおくと,

$$y_1' = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x$$

$$y_1'' = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x$$

これらを与えられた微分方程式に代入すると

$$(6a - 4b) \sin 2x + (4a + 6b) \cos 2x = 2 \sin 2x$$

両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} 6a - 4b = 2 \\ 4a + 6b = 0 \end{cases}$$

よって  $a = \frac{3}{13}, b = -\frac{2}{13}$

従って

$$y_1 = \frac{1}{13}(3 \sin 2x - 2 \cos 2x)$$

が特殊解である.

ゆえに一般解は

$$y = e^{-x}(A \sin 3x + B \cos 3x) + \frac{1}{13}(3 \sin 2x - 2 \cos 2x)$$