平成 23 年度　数学実力試験　（平成 23 年 11 月実施）

4 年　＿＿ 科　＿＿ 番　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

注意．問題用紙をつねに半分に折った状態で解答すること．

1.　次の方程式を解け。　[$4 \times 4 = 16$ 点]

(1) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{8}{x^2-4}$

解答例

両辺に x^2-4 をかけて

$$\begin{aligned} x(x+2)-3(x-2) &= 8 \\ x^2-x-2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x &= -1, 2 \end{aligned}$$

$x=2$ は与えられた方程式の分母を 0 にするため不適。

$\underline{x=-1}$

(2) $x^3-x-6=0$

解答例

$x=2$ とおくと、左辺は

$$2^3-2-6=8-2-6=0$$

となる。ゆえに、左辺は $x-2$ で割り切れる。

$$(x-2)(x^2+2x+3)=0$$

$\underline{\therefore x = 2, -1 \pm \sqrt{2}i}$

(3) $\log_3(x-1)+\log_3(x+7) \leqq 2$

解答例

$$\log_3(x-1)(x+7) \leqq \log_3 9$$

$y=\log_3 x$ は単調増加であるから

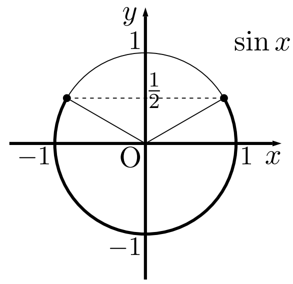
$$\begin{aligned} (x-1)(x+7) &\leqq 9 \\ x^2+6x-16 &\leqq 0 \\ (x+8)(x-2) &\leqq 0 \\ -8 \leqq x &\leqq 2 \end{aligned}$$

真数条件より $x>1$

よって　$\underline{1 < x \leqq 2}$

(4) $2\sin x \leqq 1$ $(0 \leqq x < 2\pi)$

解答例



$\sin x \leqq \dfrac{1}{2}$

$\underline{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi \leqq x < 2\pi}$

2.　導関数を求めよ。　[$4 \times 2 = 8$ 点]

(1) $y = \tan^{-1}\dfrac{1}{x}$

解答例

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(2) $y = x\sqrt{x^2+1}$

解答例

$$\begin{aligned} y' &= x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} \\ &= \frac{x^2+x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

3.　次の不定積分，定積分を求めよ。[$4 \times 2 = 8$ 点]

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x}(\log x)^2\,dx$

解答例

$t=\log x$ とおくと、$dt = \frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x}(\log x)^2 dx &= \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{(\log x)^3}{3} + C \end{aligned}$$

(C : 積分定数)

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$

解答例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$$
$$=\left[x\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2}dx$$
$$=\left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-1-1}{4}=-\frac{1}{2}$$

4. 次の問に答えよ。 $[5\times 8=40$ 点$]$

(1) 放物線 $y=2x^2-ax+2a$ と直線 $y=3x$ が共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

解答例

$$2x^2-ax+2a=3x$$
$$2x^2-(a+3)x+2a=0$$

$$D=(a+3)^2-4\cdot 2\cdot 2a$$
$$=a^2-10a+9$$
$$=(a-1)(a-9)\geqq 0$$

$\therefore a\leqq 1, 9\leqq a$

(2) 曲線 $y=\dfrac{1}{2x-1}$ の $x=2$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

解答例

$$y'=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

$x=2$ のとき

$$y=\frac{1}{3},\qquad y'=-\frac{2}{9}$$

より、求める接線の方程式は

$$y-\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}(x-2)$$
$$y=-\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}$$

$y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{7}{9}$

(3) 2 つの曲線 $y=x^2$, $x=y^2$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

解答例

$x=y^2$ に $y=x^2$ を代入して $x=x^4$

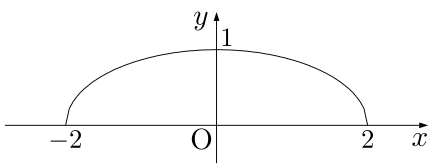
$$x^4-x=x(x-1)(x^2+x+1)=0$$

よって、交点の座標は (0,0), (1,1)

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x}^3-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

(4) 媒介変数で表された曲線 $x=2\cos t,\ y=\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を求めよ。

解答例



$t=0$ のとき、$x=2$, $t=\pi$ のとき $x=-2$ であり、求める回転体の体積は

$$\int_{-2}^{2}\pi y^2dx=\int_{\pi}^{0}\pi\sin^2 t(-2\sin t)dt$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\sin tdt$$
$$=2\pi\left[-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{8}{3}\pi$$

(公式を使う方法もある)

(5) 空間の直線 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-7}{5}$ に垂直で, 点 $(-3,5,2)$ を通る平面の方程式を求めよ。

解答例

求める平面の法線ベクトルは $(2,-1,5)$ であるから

$$2(x+3)-(y-5)+5(z-2)=0$$

$2x-y+5z+1=0$

(6) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が正則かどうかを示し，正則なら逆行列を求めよ。

解答例

$|A| = 1 \neq 0$ より、A は正則

1	−2	3	1	0	0
0	1	−2	0	1	0
0	0	1	0	0	1
1	0	−1	1	2	0
0	1	−2	0	1	0
0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	2	1
0	1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ を求めよ。

解答例

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ。

解答例

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{5}{2}}$$
$$f'''(x) = -\frac{15}{8}(x+1)^{-\frac{7}{2}}$$

より

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots$$

$$\underline{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3}$$

5. 関数 $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ の増減と極値，$x \to \pm\infty$ のときの極限を調べてグラフをかけ。 [7 点]

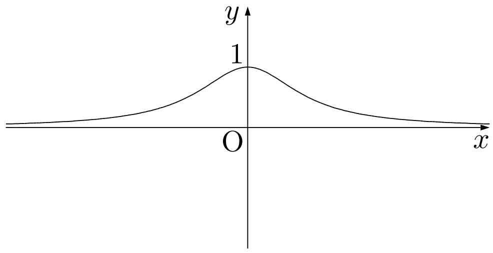
解答例

$$y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$y' = 0$ を解くと $x = 0$
$x = 0$ のとき $y = 1$
また、

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1 極大	↘	0



6. 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2$ の極値を求めよ。 [7 点]

解答例

$$f_x = 3x^2 - 6y, \qquad f_y = -6x + 6y$$
$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -6, \qquad f_{yy} = 6$$
$$H(x,y) = 36x - 36$$

$f_x = 0$, $f_y = 0$ を解くと (0,0) と (2,2)
$H(0,0) = -36 < 0$ より、(0,0) では極値をとらない
$H(2,2) = 72-36 > 0$ であり、$f_{xx}(2,2) = 12 > 0$ より、点 (2,2) で極小値 $f(2,2) = 8 - 24 + 12 = -4$ をとる。

<u>$x = 2$, $y = 2$ で極小値 -4</u>

7. 行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ。 [7点]

解答例

$$\begin{aligned}|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)-12\\ &= \lambda^2-5\lambda-6\\ &= (\lambda+1)(\lambda-6)=0\end{aligned}$$

$\underline{\lambda=-1,6}$

$\lambda=-1$ のとき

$$\begin{pmatrix}4 & 4\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より、$y=-x$

固有ベクトルは $\underline{k\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \quad (k:\text{任意})}$

$\lambda=6$ のとき

$$\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より、$3x=4y$

固有ベクトルは $\underline{l\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix} \quad (l:\text{任意})}$

8. 微分方程式 $x^2y'+y^2=xy$ を $u=\dfrac{y}{x}$ とおいて解き, $x=1$ のとき $y=-1$ を満たす解を求めよ。 [7点]

解答例

$$y'=\frac{xy-y^2}{x^2}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$u=\dfrac{y}{x}$ すなわち $y=xu$ とおけば

$$\begin{aligned}u+xu' &= u-u^2\\ xu' &= -u^2\\ -\int\frac{du}{u^2} &= \int\frac{dx}{x}\\ \frac{1}{u} &= \log|x|+C\end{aligned}$$

$u=\dfrac{y}{x}$ を代入すると

$$\frac{x}{y}=\log|x|+C$$

$x=1,\ y=-1$ を代入すると

$$-1=0+C \qquad \text{より } C=-1$$

$$\underline{y=\frac{x}{\log|x|-1}}$$