平成２１年度数学実力試験　（２００９年１１月実施９０分）

解答例

1. 方程式または不等式を解け．[各 4 点]

(1) $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{x-1}$

分母は 0 でないので，$x \neq \pm 1$

$x(x-1) = x+1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

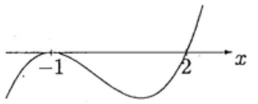
$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

(2) $x^3 - 3x - 2 \geqq 0$

$P(x) = x^3 - 3x - 2$ とすると，$P(-1) = 0$

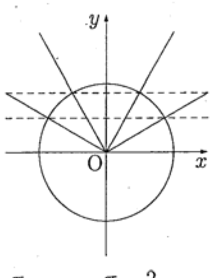
$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$P(x) = (x+1)(x^2 - x - 2) = (x+1)^2(x-2)$



$x = -1,\ x \geqq 2$

(3) $\dfrac{1}{2} < \sin\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$



$\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{6}\pi$

(4) $\log_5(2x-1) + \log_5(x-2) = 1$

真数の条件から，$2x - 1 > 0$，$x - 2 > 0$ より，

$x > 2$

$\log_5(2x-1)(x-2) = 1$

$2x^2 - 5x + 2 = 5$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$(2x+1)(x-3) = 0$

$x = -\dfrac{1}{2},\ 3$

$x > 2$ より，$x = 3$

2. 次の関数を微分せよ．[各 4 点]

(1) $y = e^{3x}\sin 2x$

$y' = 3e^{3x}\sin 2x + 2e^{3x}\cos 2x$

$\quad = e^{3x}(3\sin 2x + 2\cos 2x)$

(2) $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

$y' = \dfrac{\sin x(1+\cos x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$\quad = \dfrac{\sin x + \sin x\cos x + \sin x - \sin x\cos x}{(1+\cos x)^2}$

$\quad = \dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

3. 不定積分または定積分を求めよ．[各 4 点]

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx \quad = \int (x)'\log x\,dx$

$\displaystyle = x\log x - \int x(\log x)'\,dx$

$\displaystyle = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$\cos x = t$ とする．$-\sin x\,dx = dt$

x と t の対応関係は

x	$0 \to \frac{\pi}{3}$
t	$1 \to \frac{1}{2}$

となるから，

与式 $\displaystyle = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t}$

$\displaystyle = \Big[\log t\Big]_{\frac{1}{2}}^1 = \log 1 - \log\frac{1}{2} = \log 2$

4. 次の問いに答えよ．[各 5 点]

(1) 放物線 $y = x^2 - 4x$ と直線 $y = 2x + a$ とが接するような a の値を求めよ．またそのときの接点の座標を求めよ．

$x^2 - 4x = 2x + a$ とする．

$x^2 - 6x - a = 0 \qquad (*)$

$D = 6^2 - 4(-a) = 36 + 4a = 0$ とすると，$a = -9$

$(*)$ より，$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0 \qquad x = 3$

$y = 2\cdot 3 - 9 = -3$

$a = -9$ のとき，接点 $(3, -3)$

(2) $y = \sin^2 x$ のグラフの $x = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．

$y' = 2\cos x\sin x = \sin 2x$

$x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$y' = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$y = \sin^2\dfrac{\pi}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

$y - \dfrac{1}{2} = 1\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

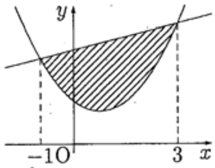
$y = x - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$

(3) 放物線 $y = 2x^2 - 3x + 5$ と直線 $y = x + 11$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

$2x^2 - 3x + 5 = x + 11$ とすると $2x^2 - 4x - 6 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0 \qquad x = -1,\ 3$



$\displaystyle\int_{-1}^3 \{x + 11 - (2x^2 - 3x + 5)\}\,dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6)\,dx$

$\displaystyle = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right]_{-1}^3$

$\displaystyle = -18 + 18 + 18 - \left(\frac{2}{3} + 2 - 6\right)$

$\displaystyle = 22 - \frac{2}{3} = \frac{64}{3}$

(4) 曲線 $y = \sqrt{x}$，x 軸，直線 $x = 2$ で囲まれた領域を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を求めよ．

$\displaystyle\int_0^2 (\sqrt{x})^2\pi\,dx = \pi\int_0^2 x\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$

$= 2\pi$

(5) 空間の直線 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}$ と平面 $x-3y+2z+7=0$ の交点を求めよ．

$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}=t$ とすると，

$x=3t+1,\ y=2t+4,\ z=4t-3$

$x-3y+2z+7=0$ に代入して

$3t+1-3(2t+4)+2(4t-3)+7=0$

$5t-10=0 \quad t=2$

交点は $(7,8,5)$

(6) $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

$$与式 = abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= abc(b-a)(c-a)\{c+a-(b+a)\}$$

$$= abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

(7) 次の和を求めよ．

$$1\times 2+3\times 4+5\times 6+\cdots+(2n-1)\times 2n$$

$$与式 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2k = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-2k)$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\{2(2n+1)-3\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

(8) $y=\sqrt{1+x}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0)=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f'(0)=-\dfrac{1}{4}$

$f'''(x)=\dfrac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \qquad f'(0)=\dfrac{3}{8}$

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3!}\frac{3}{8}x^3$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

5. 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値とそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．[7 点]

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$ とすると，

$(4-\lambda)(3-\lambda)-2=0$

$\lambda^2-7\lambda+10=0$

$(\lambda-2)(\lambda-5)=0 \qquad \lambda=2,5$

A の固有値は 2，5

(i) $\lambda=2$ のとき，

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ より $y=-2x$.

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ （k は任意）．

(ii) $\lambda=5$ のとき，

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$\begin{cases} -x+y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$ より，$y=x$.

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \ell \\ \ell \end{pmatrix}=\ell\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （ℓ は任意）．

6. 2 変数関数 $z = x^3 - 3x^2 + y^2$ の極値を求めよ．[7 点]

$f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$ とすると，$f_x = 3x^2 - 6x$，$f_y = 2y$

$f_x = f_y = 0$ とすると，$3x(x-2) = 0$，$y = 0$ より，$(x, y) = (0, 0)$，$(2, 0)$

$f_{xx} = 6x - 6$，$f_{xy} = 0$，$f_{yy} = 2$

$H(x, y) = (6x - 6) \cdot 2 - 0^2 = 12(x - 1)$

$H(0, 0) = -12 < 0$ より，(0,0) では極値をとらない

$H(2, 0) = 12 > 0$，$f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$，$f(2, 0) = -4$ より，

$(2, 0)$ で極小値 -4 をとる．

7. 微分方程式 $xy' = 3x + 2y$ を $u = \dfrac{y}{x}$ と変数変換して解け．[7 点]

$y' = 3 + 2 \cdot \dfrac{y}{x}$

$y = ux$ より，$y' = u'x + u$

$u'x + u = 3 + 2u$

$\dfrac{du}{dx}x = 3 + u$

$\displaystyle\int \frac{du}{3+u} = \int \frac{dx}{x}$

$\log(3 + u) = \log x + C$

$\log(3 + u) - \log x = C$

$\log \dfrac{3+u}{x} = C$

$\dfrac{3+u}{x} = e^C$

$e^C = A$ とおいて，

$3 + u = Ax$

$3 + \dfrac{y}{x} = Ax$

$3x + y = Ax^2$

$y = Ax^2 - 3x$

8. 関数 $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ の増減表とグラフをかけ．[7 点]

定義域は $x^2 - 4 \neq 0$ より，$x \neq \pm 2$

$$y' = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

$y' = 0$ とすると $x = 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
y'		+	×	+	0	−	×	−	
y	1	↗	×	↗	0	↘	×	↘	1