平成22年度　数学実力試験　（平成22年11月　日実施）

＿＿年　＿＿科　＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

注意．問題用紙をつねに半分に折った状態で解答すること．

1. 次の方程式を解け。[4 × 4 = 16 点]

(1) $x-1=\sqrt{2x+6}$ …… 米

両辺を2乗すると，

$(x-1)^2=2x+6$

$x^2-2x+1=2x+6$

$x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x=5,\ -1$

米に $x=5$ を代入すると

左辺 $=4$，右辺 $=\sqrt{16}=4$

米に $x=-1$ を代入すると

左辺 $=-2$，右辺 $=\sqrt{4}=2$

$\therefore\ x=5$

(2) $\sin 2x=\cos x\ (0\leqq\theta<2\pi)$

$2\sin x\cos x=\cos x$

$\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ or $\sin x=\frac{1}{2}$.

$\cos x=0$ より　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$ より　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}$

(3) $\log_3(2x+1)+\log_3(x-3)=2$

真数条件より　$2x+1>0,\ x-3>0$.

よって　$x>3$.

$\log_3(2x+1)(x-3)=\log_3 3^2$.

$(2x+1)(x-3)=9$

$2x^2-5x-12=0$

$(2x+3)(x-4)=0$

$x=-\frac{3}{2},\ 4$.

$x>3$ より　$x=4$

(4) $x^3-5x+2=0$

$P(x)=x^3-5x+2$ とすると，$P(2)=0$．よって

$x^3-5x+2=(x-2)(x^2+2x-1)=0$.

$x-2=0$ or $x^2+2x-1=0$.

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x^2+2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$

$=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$

$\therefore\ x=2,\ -1\pm\sqrt{2}$

2. 導関数を求めよ。[4 × 2 = 8 点]

(1) $y=x(2x+3)^7$

$y'=\{x\}'\cdot(2x+3)^7+x\cdot\{(2x+3)^7\}'$

$=(2x+3)^7+x\cdot7(2x+3)^6\cdot2$

$=(2x+3)^6\{2x+3+14x\}$

$=(2x+3)^6(16x+3)$

(2) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$

$y'=\dfrac{(\cos3x)'\sin2x-\cos3x\cdot(\sin2x)'}{\sin^2 2x}$

$=\dfrac{-3\sin3x\cdot\sin2x-2\cos3x\cdot\cos2x}{\sin^2 2x}$

3. 次の不定積分，定積分を求めよ。[4 × 2 = 8 点]

(1) $\displaystyle\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$

$t=\cos x$ より　$dt=-\sin x\,dx$.

与式 $=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

$=\displaystyle\int\frac{-1}{t^3}\cdot dt$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}+C$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+C$

（$\frac{1}{2}\cdot\tan^2 x+C$ でも可）

(2) $\int_1^e x\log x\,dx$

$= \int_1^e \{\frac{1}{2}x^2\}' \cdot \log x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}\cdot x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$

$= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$

$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

4. 次の問に答えよ。[5 × 8 = 40 点]

(1) 放物線 $y = x^2 - 2(a-1)x + 4$ が x 軸と共有点をもたないような実数 a の範囲を求めよ。

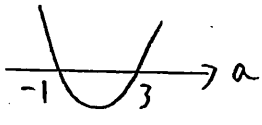
・ $D = \{-2(a-1)\}^2 - 4\cdot 1\cdot 4 < 0$

$\Leftrightarrow \quad 4(a-1)^2 - 16 < 0$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2a - 3 < 0$

・ $a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow (a-3)(a+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad a = 3, -1$



図より

$-1 < a < 3$

(2) 曲線 $y = x^3 - 4x^2 + 5$ の $x = 1$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ とする。すると,

$f'(x) = 3x^2 - 8x$. ゆえに

$f(1) = 2, \quad f'(1) = -5.$

(たがって 接線は.

$y - 2 = -5(x-1)$

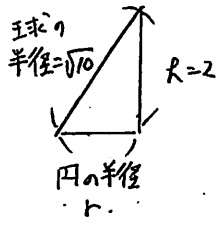
$y - 2 = -5x + 5$

$y = -5x + 7$

(3) 球 $x^2+y^2+z^2 = 10$ と平面 $2x-y-2z = 6$ が交わってできる円の面積を求めよ。

球の中心 $(0,0,0)$ と平面の距離は.

$h = \frac{|2\cdot 0 - 0 - 2\cdot 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2.$



左図より $r = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2}$

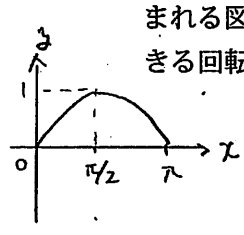
$= \sqrt{6}.$

よって面積 S は

$S = \pi\cdot(\sqrt{6})^2.$

$S = 6\pi$

(4) 曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を求めよ。



体積を V とすると,

$V = \int_0^\pi \pi\cdot\sin^2 x\,dx$

$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$= \frac{\pi^2}{2}$

$\therefore V = \frac{\pi^2}{2}$

(5) $\sum_{k=1}^{n} k(3k-1)$ を簡単にせよ。

与式 $= \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - k)$

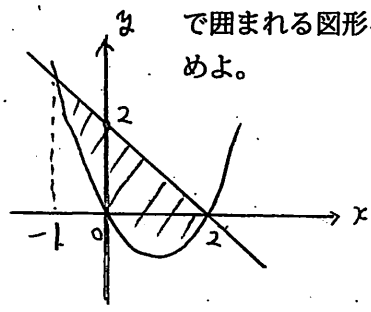
$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$

$= 3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{2}(2n+1-1)$

$= n^2(n+1)$

(6) 放物線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = -x + 2$ で囲まれる図形を図示し，その面積を求めよ。



$x^2-2x=-x+2$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,-1$

面積をSとすると，

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x+2)-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$

$$=\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ S=\frac{9}{2}$$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & ab & c^2 \\ 1 & bc & a^2 \\ 1 & ca & b^2 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ。

与式 $=\begin{vmatrix} 1 & ab & c^2 \\ 0 & b(c-a) & (a-c)(a+c) \\ 0 & a(c-b) & (b-c)(b+c) \end{vmatrix}$

$$=(a-c)(b-c)\times\begin{vmatrix} -b & a+c \\ -a & b+c \end{vmatrix}$$

$$=(a-c)(b-c)\times\{-b(b+c)+a(a+c)\}$$

$$=(a-c)(b-c)(-b^2-bc+a^2+ac)$$

$$=(a-c)(b-c)\{(a-b)(a+b)+c(a-b)\}$$

$$=(a-c)(b-c)(a-b)(a+b+c)$$

(8) $f(x)=xe^{2x}$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ。

$$f(x)=x\left(1+\frac{(2x)}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=x\left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots\right)$$

$$=x+2x^2+2x^3+\frac{4}{3}x^4+\cdots$$

$$\therefore\ x+2x^2+2x^3+\frac{4}{3}x^4$$

5. 微分方程式 $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x}$ を解け。[7点]

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x}$$

$$\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{x}$$

$\log(y+1)=\log x+C$ （C：任意定数）

$$\log\frac{y+1}{x}=C$$

$$y+1=e^C\cdot x$$

e^C を C ととり直すと，

$$y=C\cdot x-1.$$

6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ。[7点]

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot 1$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

固有方程式をとくと,

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-4) = 0$$
$$\lambda = 1, 4.$$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (kは任意)

$\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 \\ 2 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (lは任意)

7. 2変数関数 $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - 5x - y + 9$ の極値を求めよ。[7点]

$f_x = 2x - y - 5.$

$f_y = -x + 4y - 1.$

$f_x = 0,\ f_y = 0,$ つまり

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$$

をとくと, $x = 3,\ y = 1.$ このとき,

$f(3,1) = 1$

また, $f_{xx} = 2 > 0,\ f_{yy} = 4,\ f_{xy} = -1.$

なので

$$H = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$
$$= 2 \cdot 4 - (-1)^2 = 7 > 0.$$

ゆえに (3,1) で極小値 1 をとる.

8. 関数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ の増減表とグラフをかけ。[7点]

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	/	↘	2	↗	∞

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$y' = 0 \iff x = \pm 1$